

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II


Prof. Farkas


Bodo Graumann

19. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Matrizen	2
1.1	Potenzen eines Endomorphismus und der Satz von Cayley-Hamilton	3
1.2	Nilpotente Matrizen	3
1.3	Minimalpolynom eines Endomorphismus	5
1.3.1	Folgerung	6
1.3.2	Der euklidische Algorithmus	6
2	Bilinearformen	9
2.1	Orthonormalisierungssatz von Gram-Schmidt	12
2.2	Drehungen	14
2.3	Gruppentheorie	14
3	Affine Geometrie	15

 Diese Dokument wurde auf <http://bodograumann.de> veröffentlicht. Es steht unter der [Attribution-ShareAlike 3.0 Unported \(CC BY-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) Lizenz.

 Der Code wurde mit `gvim` sowie `vim-latex` erstellt und mit `xelatex` kompiliert – all das auf [Gentoo Linux](https://www.gentoo.org/). Meinen Dank an die Freie Software Community und die $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Kollegen auf [T_EX.SX](https://www.tex.sx/) für ihre Hinweise und Unterstützung.

Bitte schreibt mir eure Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu diesem Dokument! Ihr könnt mir entweder direkt mailen oder das Kontaktformular auf meiner Internetseite benutzen.

1 Matrizen

Sei V im folgenden ein \mathbb{K} -Vektorraum und f ein Endomorphismus von V .

1 Definition: „Diagonalisierbarkeit“

f heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis B von V gibt, sodass die Darstellungsmatrix von f bezüglich B Diagonalform hat.

2 Bemerkung: Kriterium für Diagonalisierbarkeit

f ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von V aus Eigenvektoren von f gibt.

3 Definition: „Charakteristisches Polynom“

Hat V die Dimension n und ist A die Darstellungsmatrix von f , so ist das charakteristische Polynom definiert als

$$\mathcal{P}_f(t) := \det(A - tI_n)$$

4 Lemma: Dimension der Eigenräume

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts (Dimension des zugehörigen Untervektorraum von V aus Eigenvektoren) ist kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit (Multiplizität der Nullstelle im charakteristischen Polynom).

5 Satz: Hauptsatz über Diagonalisierbarkeit

Hat V die Dimension n und sind λ_i die verschiedenen Eigenwerte von f , dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. f ist diagonalisierbar.
2. Die geometrische und algebraische Vielfachheit stimmt für alle Eigenwerte überein.
3. Die direkte Summe aus den Eigenräumen ist V .

6 Definition: „Trigonalisierbar“

f heißt trigonalisierbar genau dann, wenn es eine Basis von V gibt, so dass die zugehörige Darstellungsmatrix von f eine rechte obere Dreiecksmatrix ist.

7 Definition: „Invarianten Unterraum“

Ein Untervektorraum $W \leq V$ heißt f -invariant, wenn $f(W) \subset W$.

8 Bemerkung: Teilbarkeit

Ist W f -invariant, dann teilt $\mathcal{P}_{f|_W(t)} \mathcal{P}_f(t)$.

9 Satz: Trigonalisierungssatz

f ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

Spezialfall Insbesondere ist jeder Endomorphismus für einen \mathbb{K} -Vektorraum trigonalisierbar, wenn \mathbb{K} algebraisch abgeschlossen ist, wie z.B. \mathbb{C} .

1.1 Potenzen eines Endomorphismus und der Satz von Cayley-Hamilton

Durch Ersetzen der Multiplikation in \mathbb{K} mit der Hintereinanderausführung von Endomorphismen und der Addition durch die Addition ebener, können wir Polynome trivial auf den Ring der Endomorphismen von V übertragen.

10 **Satz: Satz von Cayley-Hamilton**

Ist V endlich-dimensional, so gilt

$$\mathcal{P}_f(f) = 0$$

1.2 Nilpotente Matrizen

11 **Definition: „Ähnlichkeit von Matrizen“**

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^n$ heißen ähnlich, wenn es ein $S \in GL(\mathbb{K}^n)$ gibt, sodass $B = SAS^{-1}$.

12 **Bemerkung: Eigenschaften ähnlicher Matrizen**

Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte und Eigenvektoren.

13 **Definition: „Nilpotenz, -index“**

f heißt nilpotent, falls es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $f^j = 0$. Das kleinste j für das dies zutrifft heißt Nilpotenzindex.

14 **Lemma: Aussagen über Nilpotenz**

1. Ist A eine obere Dreiecksmatrix, dann ist A genau dann nilpotent, wenn alle Diagonalelemente 0 sind.
2. Der Nilpotenzindex ist höchstens gleich der Dimension des Vektorraums, kann aber durchaus kleiner sein.
3. Nur die Nullmatrix ist nilpotent und diagonalisierbar.
4. Ist eine Matrix nilpotent, so hat sie den Eigenwert 0.

15 **Definition: „Partition einer natürlichen Zahl“**

Seien $n, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist eine Partition p von n in s Teile eine absteigende Folge von s natürlichen Zahlen deren Summe n ergibt.

16 **Definition: „Duale Partition“**

Die zu $p = (p_i, 1 \leq i \leq s)$ duale Partition ist $p^* = (q_i, 1 \leq i \leq s)$ mit

$$q_j = \#\{p_i \geq j, 1 \leq i \leq s\}$$

17 Satz: Ähnlichkeit von nilpotenten Matrizen

Wir definieren zu einer Partition zuerst die zugehörige nilpotente Matrix $\mathcal{N}(p)$ als

$$\mathcal{N}(p, 1 \leq i \leq s) := \begin{pmatrix} N(p_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & N(p_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & N(p_s) \end{pmatrix}$$

$$N(p_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Sei p und \tilde{p} Partitionen von n , dann sind die $\mathcal{N}(p)$ und $\mathcal{N}(\tilde{p})$ genau dann ähnlich, wenn $p = \tilde{p}$.
2. Sei A nilpotent mit Nilpotenzindex m und

$$q_i := \text{rk } A^{i-1} - \text{rk } A^i$$

dann ist $(q_i, 1 \leq i \leq m)$ eine Partition von n und A ist ähnlich zu $\mathcal{N}(q^*)$.

18 Satz: Kategorisierung von nilpotenten Matrizen

Sei A eine beliebige nilpotente Matrix der Dimension n mit Nilpotenzindex m und ist $q_i := \text{rk}(A^{i-1}) - \text{rk}(A^i) \geq 0$. Dann ist $q := (q_1, \dots, q_m)$ eine Partition von n und A ist ähnlich zu $\mathcal{N}(p)$ mit $p = q^*$.

Beweis (18)

$$A^m = 0$$

Wir zeigen, dass es eine invertierbare Matrix P gibt mit $P^{-1}AP = \mathcal{N}(p)$.

$$S_i := \ker(A^i) = \{x \in V: A^i x = 0\}$$

Sei $x \in S_i$

$$A^i x = 0 \Rightarrow A(A^i x) = 0 \Leftrightarrow A^{i+1} x = 0 \Leftrightarrow x \in S_{i+1}$$

$$\Rightarrow S_{i-1} \subset S_i$$

$$\{0\} = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_m = V$$

$$q_i = \text{rk}(A^{i-1}) - \text{rk}(A^i) = \dim_k(S_i) - \dim_k(S_{i-1})$$

$$\text{Also ist } q = \dim_k(S_m) - \dim_k(S_0) = n - 0 = n$$

Um zu zeigen, dass $q_i \geq q_{i+1}$ finden wir eine injektive Abbildung von $\frac{S_{i+1}}{S_i} \mapsto \frac{S_i}{S_{i-1}}$, denn $q_i = \dim(\frac{S_i}{S_{i-1}})$.

$$f: \frac{S_{i+1}}{S_i} \rightarrow \frac{S_i}{S_{i-1}}: f(x + S_i) = Ax + S_{i-1}$$

Zuerst zeigen wir die Unabhängigkeit von den gewählten Repräsentanten. Sei $x, y \in S_{i+1}$:

$$\begin{aligned} x + S_i = y + S_i &\implies Ax + S_{i-1} = Ay + S_{i-1} \\ &\Leftrightarrow (x - y) \in S_i \implies Ax - Ay \in S_{i-1} \\ &\Leftrightarrow A^i(x - y) = 0 \implies A^{i-1}(Ax - Ay) = 0 \end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir die Injektivität. Sei $x \in S_{i+1}$.

$$\begin{aligned} f(x + S_i) = 0 &\in \frac{S_i}{S_{i-1}} \\ \Leftrightarrow Ax + S_{i-1} &= S_{i-1} \Leftrightarrow Ax \in S_{i-1} \\ \Leftrightarrow A^{i-1}Ax &= 0 \Leftrightarrow x \in S_i \end{aligned}$$

Somit ist $\ker f = \{0\}$ und da f linear ist, ist sie auch injektiv.

19 Korollar: Äquivalenzrelation

In der Menge der nilpotenten Matrizen bildet die Ähnlichkeit ein Äquivalenzrelation und die $N(p)$ sind Repräsentanten der Äquivalenzklassen.

1.3 Minimalpolynom eines Endomorphismus

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, $\phi \in \text{End}_k(V)$

20 Definition: „Anwendung eines Polynoms auf einen Endomorphismus“

Ist $p \in \mathbb{K}[x]$, dann ist $p(\phi) = a_0I + a_1\phi + \dots + a_n\phi^n \in \text{End}_k(V)$ wobei $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
d.h. $\forall v \in V, p(\phi)(v) = a_0v + a_1\phi(v) + \dots + a_n\phi^n(v)$

Bemerkung $\tilde{\phi}: \mathbb{K}[x] \mapsto \text{End}_k(V)$ ist ein Ringhomomorphismus.

Folgerung $\text{Im}(\tilde{\phi}) \subseteq \text{End}_k(V)$ ist kommutativ

Beweis (Folgerung) $\psi_1, \psi_2 \in \text{Im}(\tilde{\phi})$, also $\psi_i = \tilde{\phi}(p_i)$ für $p_i \in \mathbb{K}[x], i = 1, 2$

$$\psi_1 \circ \psi_2 = \tilde{\phi}(p_1) \circ \tilde{\phi}(p_2) = \tilde{\phi}(p_1 \cdot p_2) = \tilde{\phi}(p_2 \cdot p_1) = \tilde{\phi}(p_2) \circ \tilde{\phi}(p_1) = \psi_2 \circ \psi_1$$

21 Lemma:

Es gibt ein Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$, $f \neq 0$, so dass $f(\phi) = 0 \in \text{End}_k(V)$.

Beweis (21) Sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V . Dann ist für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Menge $\{e_j, \phi(e_j), \dots, \phi^n(e_j)\}$ linear abhängig. Sei $q_j(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ mit $q_j(\phi)(e_j) = 0$. Dann ist $q(x) := \prod_{i=1}^n q_i(x)$ das gesuchte Polynom.

$$q(\phi)(e_j) = \left(\prod_{i \neq j} a_i(\phi) \right) (q_i(\phi))(e_j) = \left(\prod_{i \neq j} q_i(\phi) \right) (0) = 0$$

22 Definition: „normiertes Polynom“

Ein Polynom heißt normiert, wenn sein Absolutglied gleich 1 ist.

23 Definition: „Minimalpolynom“

Das normierte Polynom kleinsten Grades, $m_\phi \in \mathbb{K}[x]$, mit $m_\phi(\phi) = 0$ heißt das Minimalpolynom von ϕ .

(Die Eindeutigkeit muss noch gezeigt werden.)

24 Satz: Division mit Rest

Seien $f, g \in \mathbb{K}[x]$, dann existieren eindeutig bestimmte Polynome q, r mit $f = q \cdot g + r$, $\deg(r) < \deg(g)$.

1.3.1 Folgerung

Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Wurzel von f , dann gibt es ein $g \in \mathbb{K}[x]$, mit $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

25 Satz:

Ist $d = \text{ggT}(f_1, f_2)$, so gilt $d|f_1$ und $d|f_2$ sowie $g|f_1 \wedge g|f_2 \Rightarrow g|d$. Außerdem gibt es $p, q \in \mathbb{K}[x]$, so dass $d = pf_1 + qf_2$

(Der größte gemeinsame Teiler kann mit dem euklidischen Algorithmus bestimmt werden. Er ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt.)

1.3.2 Der euklidische Algorithmus

$$\begin{aligned} f_1 &= q_1 f_2 + f_3, & \deg(f_3) &< \deg(f_2) \\ f_2 &= q_2 f_3 + f_4, & \deg(f_4) &< \deg(f_3) \\ &\dots & & \\ f_{m-2} &= q_{m-2} f_{m-1} + f_m, & \deg(f_m) &< \deg(f_{m-1}) \\ f_{m-1} &= q_{m-1} f_m + 0 \end{aligned}$$

26 Satz: Erster Zerlegungssatz

Sei $f \in \mathbb{K}[x]$, $f = g \cdot h$, und g, h teilerfremd. Dann gilt

- $\ker(f(\phi)) = \ker(g(\phi)) \oplus \ker(h(\phi))$
- Die beiden Projektionen $\pi_g: \ker(f(\phi)) \rightarrow \ker(g(\phi))$ und $\pi_h: \ker(f(\phi)) \rightarrow \ker(h(\phi))$ auf die Summanden sind gegeben durch $\pi_g = q(\phi) \cdot h(\phi)$ und $\pi_h = p(\phi) \cdot g(\phi)$ mit $1 = pg + qh$ für $p, q \in \mathbb{K}[x]$

Beweis (26) $ggT(g, h) = 1 \Rightarrow 1 = pg + qh$ für $p, q \in \mathbb{K}[x]$.

Lemma $m_{J(\lambda, n)} = (t - \lambda)^n$

Proposition Sei $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$. Wobei $A_i = J(\lambda_i, p_{i1}) \oplus J(\lambda_i, p_{i2}) \oplus \dots \oplus J(\lambda_i, p_{ik})$. Dann ist $m_A(t) = (t - \lambda_1)^{p_{11}} (t - \lambda_2)^{p_{21}} \dots (t - \lambda_k)^{p_{k1}}$ mit paarweise verschiedenen λ_i .

Beweis (26)

$$\begin{aligned} m_{\bigoplus A_i}(t) &= \text{lcm}(m_{A_i}(t)) \\ &= \text{lcm}(m_{J(\lambda_k, p_{ki})}(t)) \\ &= \text{lcm}((t - \lambda_k)^{p_{ki}}) \\ &= \prod (t - \lambda_i)^{p_{ki}} \end{aligned}$$

27 Satz:

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $q(t) = (t - \lambda)^m$ sodass $q(A) = 0$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix $\bigoplus J(\lambda, p_i) = J(\lambda, (p_1, \dots, p_s))$. Dabei ist $p = (p_1, \dots, p_s)$ eine Partition von n ist mit $p_i \leq m$.

Beweis (27) $B := A - \lambda I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

$0 = q(A) = (A - \lambda I_n)^m = B^m \Rightarrow B$ ist eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzindex $\leq m$

$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $P^{-1}BP = N(p)$, $p = (p_1, \dots, p_s)$ und $p_i \leq m$.

Bemerkung: Der Nilpotenzindex von $N(p)$ ist p_1 .

$$P^{-1}AP = P^{-1}(B + \lambda I_n)P = P^{-1}BP + P^{-1}(\lambda I_n)P$$

$$= N(p) + \lambda I_n = J(\lambda, p).$$

Also ist A ähnlich zu $J(\lambda, p)$

Lemma Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und f ein Endomorphismus von V sowie $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ ein Polynom mit $q(f) = 0$. Sei $q(t) = \prod q_i(t)$ mit teilerfremden Faktoren. $V_i := \ker(q_i(f)) \leq V$ ist ein f -invarianter Unterraum von V und $V = \bigoplus V_i$

Beweis (27) Wir definieren $z_j(t) = \prod_{i \neq j} q_i(t) \in \mathbb{K}[t]$

$$z_j(t)q_j(t) = q(t) \text{ für alle } 1 \leq j \leq r$$

$$\gcd(z_i) = w(t) \text{ ist eine Einheit} \Leftrightarrow \deg w(t) = 0$$

$$w(t)|z_1(t) = q_2 \cdots q_r \Rightarrow \exists i \neq 1, \text{ sodass } w(t)|g_i(t)$$

$$w(t)|z_j(t) \Rightarrow \exists w(t) \text{ ist eine Einheit, weil } \gcd(q_i, q_j) = 1.$$

$$\gcd(z_i) = 1 \Rightarrow \exists y_i \in \mathbb{K}[t]: \sum y_i(t)z_i(t) = 1$$

$$\sum y_i(f) = id_V$$

$$\text{Wir setzen } v_j := z_j(f)y_j(f)(v).$$

$$\text{Dann gilt } g_j(f)(v_j) = g_j(f)z_j(f)y_j(f)(v) = q(f)y_j(f)(v) = y_j(f)q(f)(v) = 0$$

$$\Rightarrow v_j \in V_j$$

$$v = \sum_{j=1}^r z_j(f)y_j(f)(v) = \sum_{j=1}^r v_j$$

$$\text{Also ist } V = \sum V_j.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist.

$$\text{Sei } v = \sum v_j = \sum b_j, v_j, b_j \in V_j.$$

$$v_j = z_j(f)y_j(f)(v) = z_j(f)y_j(f) \left(\sum b_i \right)$$

$$= z_j(f)y_j(f)(b_j), \text{ da } b_i \in \ker(q_i) = V_i, q_i|z_j$$

Also ist die Darstellung eindeutig

$$v \in V_j, q_j(f) \cdot f = f \cdot q_j(f)$$

$$\Rightarrow q_j(f)(f(v)) = f(g_j(f)(v)) = 0$$

$$\Rightarrow f(v) \in \ker(q_j \cdot f) = V_j$$

28 Definition: „Jordan Normalform“

Es sei

$$J(\lambda, n) := \lambda I_n + \mathcal{N}(n)$$

dann ist heißt

$$A = \bigoplus_{i=1}^k \left(\bigoplus_{j=1}^{s_i} J(\lambda, p_{ij}) \right)$$

Matrix in Jordan Normalform.

29 Lemma: Zerlegung des Minimalpolynoms

Ist eine Matrix die direkte Summe mehrerer Matrizen, so ist ihr Minimalpolynom das kleinste gemeinsame Vielfache derer Minimalpolynome.

30 Lemma: Potenzen des Minimalpolynoms

Ist A die direkte Summe von $J(\lambda_i, p_i)$, wobei $p_i = (p_{ik})$ Partitionen sind, so ist

$$m_A(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{p_{i1}}$$

31 Lemma: Existenz der Jordan Normalform

Existiert $q(t) = (t - \lambda)^m$ sodass $q(A) = 0$, so gibt es eine Partition $p = (p_i)$ von n mit $p_i \leq m$ sodass A ähnlich ist zu

$$\bigoplus_{i=1}^s J(\lambda, p_i) =: J(\lambda, (p_1, \dots, p_s))$$

32 Satz: Satz von Jordan

1. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, so ist A ähnlich zu einer Jordan Normalform genau dann, wenn $m_A(t)$ in Linearfaktoren zerfällt.
2. Seien A und B zwei Jordan Normalformen $A = \bigoplus J(\lambda_k, p_k)$ und $B = \bigoplus J(\mu_k, c_k)$. A und B sind ähnlich genau dann, wenn die Summanden übereinstimmen.

33 Korollar: Erkenntnisse aus dem Satz von Jordan

1. Jede Matrix über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist ähnlich zu einer Jordan Normalform.
2. Ist eine Matrix diagonalisierbar, so ist sie jordansch.
3. Hat eine Matrix mit reellen Einträgen nur reelle Eigenwerte, so ist sie jordansch.
4. Jede Matrix über \mathbb{C} ist die Summe einer diagonalisierbaren Matrix D und einer nilpotenten Matrix N . Dabei ist $DN = ND$.
5. Jede Matrix über \mathbb{C} ist ähnlich zu ihrer Transponierten.

2 Bilinearformen

34 Definition: „Bilinearform“

Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} . Dann ist eine Abbildung $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform, wenn sie für beide Argumente linear bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation ist.

35 Definition: „Gramsche Matrix“

Sei $B = (e_i)$ eine Basis von V , dann ist

$$\mathcal{G}_B(f) = (f(v_i, v_j))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

die Gramsche Matrix der Bilinearform f bezüglich der Basis B . Diese bestimmt die Bilinearform eindeutig.

36 Satz: Basiswechselformel

Hat man zwei Basen B und B' sowie die Basiswechselformel P , dann gilt

$$\mathcal{G}_{B'}(f) = P^T \mathcal{G}_B(f) P$$

37 Definition: „symmetrische Bilinearform“

Eine Bilinearform heißt symmetrisch, wenn für alle Vektoren $v, w \in V$ gilt

$$f(v, w) = f(w, v)$$

38 Korollar: Gramsche Matrix symmetrischer Bilinearformen

Eine Bilinearform ist genau dann symmetrisch, wenn ihre Darstellungsmatrix symmetrisch ist.

39 Definition: „Radikal einer Bilinearform“

Das Radikal einer Bilinearform ist die Menge

$$\{v \in V \mid f(v, w) = 0 \forall w \in V\}$$

40 Definition: „Degeneriertheit“

Eine symmetrische Bilinearform ist genau dann ausgeartet wenn ihr Radikal nicht trivial ist.

41 Satz: Kriterium für Degeneriertheit

f ist genau dann nicht degeneriert, wenn ihre Darstellungsmatrix vollen Rang hat.

42 Definition: „quadratische Form“

$$q(v) := f(v, v)$$

heißt die zu f gehörige quadratische Form, wenn f symmetrisch ist.

43 Lemma: Rückführung

Abgesehen bei Körpern des Charakters 2 ist

$$f(v, w) = \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w))$$

44 Definition: „Skalarprodukt“

Ein Skalarprodukt ist eine positiv-definite symmetrische Bilinearform eines \mathbb{R} -Vektorraums.

45 Definition: „Euklidischer Raum“

Ein euklidischer Raum ist ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt.

46 Definition: „Semilinear, sesquilinear, hermitesch“

Eine Abbildung f heißt

semilinear für $f: V \rightarrow V$ wenn $f(v+w) = f(v) + f(w)$ und $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$

sesquilinear für $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ wenn sie linear im ersten und semilinear im zweiten Argument ist.

hermitesch für $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $s(v, w) = \overline{s(w, v)}$

47 Definition: „Unitärer Vektorraum“

Ein \mathbb{C} -Vektorraum mit positiv-definiter hermitescher Sesquilinearform heißt unitär.

48 Lemma: über Sesquilinearformen

Sei $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform mit Gramscher Matrix A . Dann gilt

1. A ist hermitesch: $A^T = \overline{A}$.
2. $s(v, w) = x^T A \overline{y}$
3. Seien B und B' Basen von V dann ist

$$\mathcal{G}_{B'} = \left(M_B^{B'} \right)^T \overline{\mathcal{G}_B} M_B^{B'}$$

49 Lemma: hermitesche und quadratische Form

Ist $s: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form und $q: V \rightarrow \mathbb{C}$, $q(v) = s(v, v)$ die zugehörige quadratische Form, dann gilt

$$s(v, w) = \frac{1}{4} (q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw))$$

50 Satz: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer oder euklidischer Vektorraum mit Norm $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$, dann gilt

$$\forall v, w \in V: |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

und die Gleichheit tritt genau dann ein, wenn v und w linear abhängig sind.

51 Korollar: Eigenschaften der Norm

Im euklidischen/unitären Vektorraum gilt

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

52 Definition: „orthogonal“

Zwei Vektoren heißen orthogonal wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Zwei Untervektorräume U, W heißen Orthogonal wenn alle Paare $u \in U$ und $w \in W$ orthogonal sind. Das orthogonale Komplement zu U ist definiert als $U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall u \in U\}$, der größte zu U orthogonale Untervektorraum von V .

53 Definition: „orthonormal“

Eine Familie von Vektoren heißt orthonormal, wenn alle paare verschiedener Vektoren orthogonal sind und alle Vektoren normiert sind. Eine orthonormale Basis heißt Orthonormalbasis.

54 Lemma: Zerlegung von Vektoren durch Orthonormalbasen

Eine Orthonormalbasis (e_i) zerlegt jeden Vektor mittels Skalarprodukt (Projektion):

$$v = \sum_{i=1}^{\dim V} \langle v, e_i \rangle e_i$$

55 Satz: Projektion durch Orthonormalbasen

Sei $U \leq V$ ein Unterraum und $B = (e_i) \subset U$ eine Orthonormalbasis von U . Dann ist die Abbildung

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^{\dim U} \langle v, e_i \rangle e_i$$

linear und unabhängig von der Wahl der Basis B . p_U heißt Projektion von V auf U .

56 Definition: „Winkel“

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in V \setminus \{0\}$, dann heißt

$$\theta = \angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

der Winkel zwischen v und w .

Insbesondere sind v und w orthogonal wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$ und kollinear wenn $\theta = 0$ oder $\theta = -\pi$.

2.1 Orthonormalisierungssatz von Gram-Schmidt**57 Lemma: orthonormalisierung**

Sind v_i linear unabhängig im euklidischen Raum V , dann gibt es eine orthonormale Familie von Vektoren, die den gleichen Untervektorraum aufspannt.

58 Satz: Satz von Gram-Schmidt

Zu jeder Orthonormalbasis von $U \leq V$ gibt es eine Ergänzung zu einer Orthonormalbasis von V .

59 Definition: „Gramsche Determinante“

Seien $v_i, 1 \leq i \leq m, m \leq n = \dim V$ Vektoren, dann ist die Gramsche Determinante definiert als

$$G(v_1, \dots, v_m) := \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \dots & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{vmatrix}$$

60 Lemma: Eigenschaften der Gramschen Determinante

Die Gramsche Determinante ist nicht negativ und 0 genau dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

61 Definition: „Volumen“

Das m -dimensionale Volumen der v_i ist

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) := \sqrt{G(v_1, \dots, v_m)}$$

62 Satz: Ungleichung von Hadamard

Seien v_i Vektoren in V , dann gilt

$$\text{Vol}(v_1, \dots, v_m) \leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_m\|$$

63 Definition: „orthogonale Abbildung“

Eine Abbildung heißt orthogonal, falls

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle v, w in V .

64 Lemma: Einordnung

Jede orthogonale Abbildung $f: V \rightarrow V$ ist \mathbb{R} -linear.

65 Bemerkung: Raum der orthogonalen Abbildungen

Die orthogonalen Endomorphismen bilden eine Gruppe für endlich-dimensionale Vektorräume, sie heißt die orthogonale Gruppe $\mathbb{O}(\mathbb{R})$. Ist insbesondere die Determinante der Darstellungsmatrix gleich 1, dann gehört die Abbildung zur speziellen orthogonalen Gruppe $S\mathbb{O}(\mathbb{R})$.

66 Definition: „Bewegung“

Eine Bewegung von V ist eine Abbildung $\beta: V \rightarrow V$ mit

$$\|\beta(v) - \beta(w)\| = \|v - w\|$$

für alle $v, w \in V$.

67 Satz: Orthogonalität von Bewegungen

Ist $\beta: V \rightarrow V$ eine Bewegung, so ist die Abbildung

$$f(v) = \beta(v) - \beta(0)$$

orthogonal. Insbesondere ist jede Bewegung, die 0 festhält orthogonal.

68 Korollar: Raum der Bewegungen

Ist $\dim V < \infty$ dann ist jede Bewegung bijektiv und die Bewegungen bilden eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung.

69 Lemma: Orthogonalität der Darstellungsmatrix

Ein Endomorphismus ist genau dann orthogonal, wenn seine Darstellungsmatrix orthogonal ist.

70 Lemma: Eigenschaften der speziellen orthogonalen Gruppe

Ist $n = \dim V < \infty$ ungerade und $A \in \mathcal{SO}(\mathbb{R})$, dann ist $\det A - I_n = 0$. A besitzt also den Eigenwert 1 und hat einen Fixpunkt $v_1 \neq 0$.

71 Definition: „Spiegelung“

Die \mathbb{R} -lineare Abbildung $s: V \rightarrow V$ definiert als

$$s = 2p_u - \text{id}$$

wobei p_u die Projektion von V auf $U \leq V$ ist, heißt Spiegelung von V an U .

72 Lemma: Determinante der Spiegelungsmatrix

Die Determinante der Spiegelungsmatrix ist 1, wenn $n = \dim V$ gerade ist und -1 andernfalls.

2.2 Drehungen**73 Lemma: Charakterisierung der orthogonalen Abbildungen**

Ist $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, dann gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ so dass für $\det A = 1$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und für $\det A = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

Außerdem sind die Elemente von $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ gerade die Drehungen.

74 Lemma: Drehungen im \mathbb{R}^3

$A \in \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Drehung, wenn $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ ist.

75 Satz: Klassifikation der Bewegungen von \mathbb{R}^2

Die Bewegungen von \mathbb{R}^2 werden erzeugt von den Translationen, Drehungen und einer Spiegelung.

2.3 Gruppentheorie**76 Definition: „Symmetriegruppe“**

Sei $M \subset V$. Eine Symmetrie ist eine Bewegung, die M in sich überführt. Das heißt $\beta(M) = M$. Die Symmetrien bilden eine Untergruppe, der Bewegungsgruppe.

77 Satz: Untergruppen der orthogonalen Gruppe in \mathbb{R}^2

Die Untergruppen von $O_2(\mathbb{R})$ sind die zyklischen Gruppen (erzeugt von einer Drehung um $\frac{2\pi}{n}$) und die Diedergruppen von D_n .

78 Lemma: Berechnung von der Spur einer Drehung

Für eine Drehung um den Winkel φ und ihre Darstellungsmatrix A gilt

$$\text{Tr } A = 1 + 2 \cos \varphi$$

79 Satz: Untergruppen der orthogonalen Gruppen in \mathbb{R}^3

Die Untergruppen von $SO_3(\mathbb{R})$ sind die zyklische Gruppe, die Diedergruppen und die Tetraedergruppe.

3 Affine Geometrie**80 Definition: „Tupel“**

Ein Tupel $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ ist ein affiner Raum, wobei \mathcal{A} eine Menge ist, V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $\varphi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$ eine Abbildung wobei mit $\overline{AB} := \varphi(A, B)$ gilt:

1. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$
2. Bei Wahl von A und $v = \overline{AB}$ existiert B eindeutig bestimmt.

81 Bemerkung: Eigenschaften

- $\overline{AA} = 0 \in V$
- $\overline{BA} = -\overline{AB}$
- Für $A \in \mathcal{A}$ ist $\varphi_A: \mathcal{A} \rightarrow V, \varphi_A(B) := \overline{AB}$ bijektiv.

82 Satz: Affine Kombination

Für $p + 1$ Punkte A_i aus \mathcal{A} und $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1$ gibt es genau einen Punkt $P \in \mathcal{A}$ sodass

$$\overline{OP} = \sum_{i=0}^p \alpha_i \overline{OP_i}$$

83 Definition: „affiner Unterraum“

Ein affiner Unterraum $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ist eine Teilmenge sodass $\{\overline{AB}\} \leq V$ ist.

84 Definition: „affin unabhängig“

Eine Familie von Punkten eines affinen Raums heißen affin unabhängig genau dann, wenn keiner von ihnen als affine Kombination der anderen Dargestellt werden kann.

85 Lemma: affine Unabhängigkeit, lineare Unabhängigkeit

Affine Punkte sind affin unabhängig, wenn die Verbindungsvektoren eines von ihnen zu allen anderen linear unabhängig sind.

86 Lemma: Charakterisierung von affinen Unterräumen

Der zugehörige Vektorraum zu einem affinen Unterraum ist bereits die Menge der Verbindungsvektoren eines Basispunktes zu allen anderen und hängt nicht von der Wahl des Basispunktes ab.

87 Definition: „kartesisches Koordinatensystem“

Habe der affine Raum \mathcal{A} die Dimension n . Dann ist ein kartesisches Koordinatensystem ein Paar $R = (O, B)$ mit $O \in \mathcal{A}$ und $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ einer Basis von V . Dann lässt sich jeder Punkt als

$$\overline{OP} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

darstellen mit eindeutigen kartesischen Koordinaten α_i .

88 Definition: „affines Koordinatensystem“

Ein affines Koordinatensystem besteht aus $n + 1$ affin unabhängigen Punkten.

89 Lemma: Darstellung

Zu einem affinen Koordinatensystem gibt es eine eindeutige affine Kombination aller Punkte von \mathcal{A} .

90 Definition: „Teilverhältnis“

Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\overline{AP} = \lambda \overline{PB}$ heißt das Teilverhältnis von $(A, B|P)$.

91 Lemma: Formeln für Teilverhältnisse

Seien A, B, C verschiedene kollineare Punkte, dann gilt

$$(A, B|C) = \lambda$$

$$(A, C|B) = -(\lambda + 1)$$

$$(B, A|C) = \frac{1}{\lambda}$$

$$(B, C|A) = -\frac{\lambda + 1}{\lambda}$$

$$(C, A|B) = -\frac{1}{1 + \lambda}$$

$$(C, B|A) = -\frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

92 Satz: Hyperebenengleichung

Für einen Punkt $P = \alpha_0 E_0 + \dots + \alpha_n E_n$ gilt

$$P \in A_0 \cdots A_{n-1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_{0,0} & \cdots & \alpha_{n-1,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{0,n} & \cdots & \alpha_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

93 Satz: Satz von Minelaos

Seien A, B, C Punkte eines affinen Raums und $A_1 \in \overline{AB}$, $B_1 \in \overline{AC}$ und $C_1 \in \overline{AB}$ gegeben. A_1, B_1 und C_1 sind genau dann kollinear, wenn

$$(B, C|A_1)(C, A|B_1)(A, B|C_1) = -1$$

94 Bemerkung: Verallgemeinerung des Satzes von Minelaos

Der obige Satz lässt sich analog für n affin unabhängige Punkte aufstellen.

95 Definition: „affine Abbildung“

Eine affine Abbildung (oder affiner Morphismus) ist eine Abbildung $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sodass

$$f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q) \quad \forall P, Q \in \mathcal{A}, \quad \alpha + \beta = 1$$

96 Satz: zugehörige lineare Abbildung

Ist $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein affiner Morphismus, dann gib es eine lineare Abbildung $t: V \rightarrow W$ so dass

$$t(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$$

97 Lemma: Abbildung von affinen Unterräumen

Ist (\mathcal{A}', V') ein affiner Unterraum von \mathcal{A} , dann ist $(f(\mathcal{A}'), t(V'))$ ein affiner Unterraum des Bildraums.

98 Definition: „parallele Unterräume“

Zwei affine Unterräume heißen Parallel, wenn ihre zugehörigen Vektorräume V_1 und V_2 die Bedingung $V_1 \subseteq V_2$ oder $V_2 \subseteq V_1$ erfüllen. (Achtung, diese Eigenschaft ist nicht transitiv!)

99 Lemma: Darstellung von affinen Abbildungen

Jede affine Abbildung wird durch zwei Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{K}^m$ beschrieben werden und es gilt für die kartesische Koordinaten $X \in \mathbb{K}^n$ und $Y \in \mathbb{K}^m$:

$$Y = B + AX$$

100 Satz: Satz von Gauß-Lagrange

Sei $g: V \rightarrow \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Dann gibt es eine Basis, sodass die Darstellungsmatrix Diagonalform annimmt, und die ersten $r = \text{rk } g$ Elemente nicht 0 sind. Es gilt also in dieser Basis:

$$g(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2$$

101 Korollar: Spezialfälle

Insbesondere können also die λ_i in \mathbb{C} zu 1 normiert werden und in \mathbb{R} zu 1 oder -1 . Sortiert man dann in \mathbb{R} noch die 1 an den Anfang, so ist die Anzahl dieser der Index der quadratischen Form.

102 Satz: Satz von Sylvester

Der Index einer reellen quadratischen Form ist invariant (gegenüber Wahl der Basis).

103 Definition: „Äquivalenz von quadratischen Formen“

Zwei quadratische Formen g_1, g_2 heißen äquivalent, wenn es ein $t \in GL(V)$ gibt, sodass $g_2(v) = g_1(t(v))$ für alle $v \in V$.

104 Lemma: Kategorisierung der quadratischen Formen in \mathbb{R} und \mathbb{C}

In \mathbb{C} bilden alle quadratischen Formen mit gleichem Rang eine Äquivalenzklasse und unter \mathbb{R} all jene mit gleichem Rang und gleichem Index.

105 Satz: Satz von Jakobi

Sei g eine quadratische Form und die Hauptunterminoren (Δ_i) der Darstellungsmatrix sind nicht Null, dann gibt es eine Basis, sodass g folgende Form annimmt:

$$g(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n^2$$

106 Satz: Hauptunterminore symmetrischer Matrizen

Eine symmetrische Matrix hat genau dann positive Hauptunterminore, wenn sie positiv-definit ist.

107 Definition: „Biaffine Formen“

Eine biaffine Form ist eine Abbildung $G: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$ für die mit $\alpha + \beta = 1$ gilt

$$G(\alpha P_1 + \beta P_2, Q) = \alpha G(P_1, Q) + \beta G(P_2, Q)$$

$$G(P, \alpha Q_1 + \beta Q_2) = \alpha G(P, Q_1) + \beta G(P, Q_2)$$

für alle $P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}$.

108 Lemma: lineare Abbildung zu biaffinen Formen

Ist G eine biaffine Abbildung, dann gibt es eindeutig bestimmte lineare Abbildung f_1 und f_2 sowie eine Bilinearform g , sodass

$$G(P, Q) = g(\overline{OP}, \overline{OQ}) + f_1(\overline{OP}) + f_2(\overline{OQ}) + c$$

mit einem $c \in \mathbb{K}$.

109 Korollar: Darstellung von biaffinen Formen

Wir können eine biaffine Form also mit $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{1 \times n}$ und $c \in \mathbb{K}$ darstellen als

$$G(x, y) = x^T A y + Bx + By + c$$

110 Definition: „quadratische Varietäten / Quadrik“

Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge einer biaffinen Form $G(x, x)$.

111 Definition: „erweiterte Matrix“

Die erweiterte Matrix einer biaffinen Form ist

$$G = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & c \end{pmatrix}$$

112 Satz: Ränge der Matrizen

Sei $r := \text{rk } A$ und $\rho := \text{rk } G$. Dann gilt $r \leq \rho \leq r + 2$.

113 Satz: Diagonalisierungssatz

Sei $G(x) = x^T A x + 2Bx + c$ eine Quadrik und $r = \text{rk } A$, $\rho = \text{rk } G$ sowie $p = \text{index } A$. Dann gibt es eine Basis sodass

1. Für $\rho = r$ gilt: $G(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0$.
2. Für $\rho = r + 1$ gilt: $G(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 - 1 = 0$.
3. Für $\rho = r + 2$ gilt: $G(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 - 2x_{r+1} = 0$.

114 Definition: „Mittelpunkt der Quadrik“

Ein Punkt M des affinen Raums heißt Mittelpunkt der Quadrik H genau dann, wenn für alle $P \in H$ auch $(2M - P) \in H$ ist. (Die Spiegelung von P an M .)

115 Satz: Kriterium für Mittelpunkte

Ein Punkt M ist Mittelpunkt (Zentrum) der Quadrik, wenn $B + M^T A = 0$ bzw. $AM + B^T = 0$ (weil für die Quadrik oBdA $A = A^T$ gewählt werden kann).

116 Korollar: Existenz

H besitzt ein Zentrum genau dann, wenn $\text{rk } A = \text{rk } (A, B^T)$.

117 Korollar: Raum der Mittelpunkte

Der Raum der Mittelpunkte von H ist ein affiner Teilraum von \mathcal{A} der Dimension $n - r$.

118 Bemerkung: Werte bei den Mittelpunkten

Die biaffine Form hat bei den Mittelpunkten den selben Wert.

119 **Definition: „singulärer Punkt“**

Ein Mittelpunkt der Teil der Quadrik ist, heißt singulärer Punkt der Quadrik.

120 **Satz: Kriterium für singuläre Punkte**

P ist ein singulärer Punkt genau dann, wenn $AP + B^T = 0$ und $BT + C = 0$ ist.

121 **Korollar: Existenzkriterium**

H besitzt einen singulären Punkt genau dann, wenn $\rho = r$ ist.

Beispiele**Kegelschnitte im \mathbb{R}^2**

$\rho = 3, r = 2, p = 2$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Ellipse
$\rho = 3, r = 2, p = 1$	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Hyperbel
$\rho = 3, r = 2, p = 0$	$-x^2 - y^2 - 1 = 0$	Leer
$\rho = 3, r = 1, p = 1$	$x^2 - 2y = 0$	Parabel
$\rho = 2, r = 2, p = 2$	$x^2 + y^2 = 0$	Punkt
$\rho = 2, r = 2, p = 1$	$x^2 - y^2 = 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt
$\rho = 2, r = 1, p = 1$	$x^2 - 1 = 0$	2 parallele Geraden

und im \mathbb{R}^3

$\rho = 4, r = 3, p = 3$	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	Ellipsoid
$\rho = 4, r = 3, p = 2$	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	einschaliger Hyperboloid
$\rho = 4, r = 3, p = 1$	$x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$	zweischaliger Hyperboloid
$\rho = 3, r = 2, p = 2$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\rho = 3, r = 2, p = 1$	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$\rho = 3, r = 1, p = 1$	$x^2 - 2y = 0$	parabolischer Zylinder